АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

А. П. ЮШКЕВИЧ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ ДО 1917 ГОДА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1968

А. П. Котельников и теория векторов в неевклидовых пространствах. Большие заслуги в разработке проблем неевклидовой геометрии и механики принадлежали Александру Петровичу Котельникову (20 октября 1856—6 марта 1944), сыну П. И. Котельникова и ученику А. В. Васильева и Ф. М. Суворова. Вскоре после окончания Казанского университета (1889) Котельников приступил к разработке проблем механики неевклидовых пространств, результатом чего и явились его магистерская диссертация «Винтовое счисление и некоторые его применения к геометрии и механике» (Казань, 1895), а затем и докторская диссертация «Проективная теория векторов». В 1893—1899 гг. он преподавал в Казанском университете в звании приват-доцента. После защиты второй диссертации, за которую ему присудили степени доктора чистой и прикладной математики, Котельников некоторое время работал профессором в Киевском политехническом институте, с 1904 по 1914 г.— в Казани, затем в течение 10 лет вновь в Киеве (в университете и в Политехническом институте). С 1924 г. и до конца жизни он руководил кафедрой механики в Московском Высшем техническом училище, преподавал и в других втузах и работал в ЦАГИ. Продолжая научные работы по механике и геометрии, он вместе с тем принял деятельное участие в подготовке Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, а также, в качестве главного редактора, Полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского. В 1934 г. ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР.

В самом конце шестидесятых годов XIX века итальянский математик А. Дженокки и бельгиец Ж. де Тилли занялись вопросами неевклидовой

[1]) Н. Н. Парфентьев, Заслуженный профессор математики Александр Васильевич Васильев (Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва, (2) т. 24 (1924); он же, А. В. Васильев как математик и философ (там же, (3) т. 4, 1929—1930).

механики, на необходимость разработки которой указывал еще сам Лобачевский. Правда, первоначальной целью обоих авторов была попытка доказать от противного евклидов постулат о параллельных, получив при отказе от этого постулата какое-либо противоречие в системе механики. Но противоречие такого рода, естественно, не обнаруживалось, и, убедившись в тщетности поисков, Дженокки и де Тилли положили начало неевклидовой механике. Проблема привлекла внимание ряда ученых. В России первые работы по этому вопросу принадлежали А. П. Котельникову и Павлу Соломоновичу Юшкевичу (11 июля 1873—6 декабря 1945), опубликовавшему работу «О сложении сил в гиперболическом пространстве» (Вестн. опытной физики и элем. математики, сем. 22, 1898). Сложение сил, скоростей, вообще векторов в евклидовом пространстве выражается правилом параллелограмма. В пространстве Лобачевского параллелограммов нет и необходимо иное определение векторной суммы.

А. П. Котельников.

Проблема сложения векторов в пространствах постоянной кривизны явилась одним из отправных пунктов творчества А. П. Котельникова.

Во введении к докторской диссертации он, характеризуя наиболее существенные пункты, отличающие ее от работ других авторов, указывал, во-первых, что рассматривает кинематику и динамику твердого тела не по отдельности, но соединяет их в одну более отвлеченную теорию векторов, и, во-вторых, что «все указанные мною авторы задавали силу и скорость совокупностью прямой и числа, и только де Тилли и П. Юшкевич изобразили силы и скорость им пропорциональными отрезками прямой. Такое геометрическое представление у названных авторов, однако, не играет никакой существенной роли и даже простейшим законом сложения сил и скоростей эти авторы, подобно всем другим, пользовались в его аналитической форме. Никто, насколько мне известно, не задавался вопросом, не следует ли, изображая силы и скорости прямолинейным отрезком, принять какую-нибудь другую зависимость между длиной этих отрезков и величиной изображаемых ими сил и скоростей вместо прямой пропорциональности, никто не задавался вопросом, нельзя ли основной закон механики — закон сложения сил и скоростей — выразить в столь же простой геометрической форме, как и правило параллелограмма в евклидовом пространстве и, таким образом, придать механике твердого тела в неевклидовых пространствах более геометрический характер. Эти вопросы следует считать исходными вопросами моей работы. Они повели меня в свою очередь к более глубокому анализу тех предположений, которые необходимы с точки зрения проективной геометрии для формального обоснования теории векторов» [1]).

[1]) А. П. Котельников, Проективная теория векторов. Введение к докторской диссертации (отд. оттиск.), Казань, 1899, стр. 29.

Построение теории векторов с приложениями к механике и геометрии и составляет содержание обеих диссертаций А. П. Котельникова, причем основным аппаратом служит винтовое исчисление и арифметика особого рода комплексных чисел с двумя единицами. Корни винтового исчисления восходят к теории кватернионов Гамильтона, о которой нам еще придется говорить (см. стр. 555 и след.), и развивающим ее трудам У. Клиффорда и Р. Болла, которые начали появляться в семидесятые годы XIX века. Были введены общие комплексные числа вида $a + b\omega$, где вторая единица ω для пространств Евклида, Римана и Лобачевского определяется соответственно равенствами

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^2 = k^2 > 0, \quad \omega^2 = k^2 < 0$$

(k^2 — кривизна пространства). Эти числа были названы, следуя тому же порядку, параболическими, эллиптическими и гиперболическими; частным случаем последних являются обыкновенные комплексные числа, $k^2 = -1$. Выражения $q_1 + \omega q_2$, в которых q_1 и q_2 суть гамильтоновы кватернионы, именуются бикватернионами и последние, подобно общим комплексным числам $a + b\omega$, подразделяются на параболические, эллиптические и гиперболические. Для характеристики системы приложенных к телу сил и его движения в пространстве Евклида было предложено понятие винта, как пары скользящего и свободного векторов, которые можно выбрать коллинеарными. Между всеми тремя категориями объектов существует тесная взаимосвязь: параболический кватернион можно рассматривать как сумму параболического комплексного числа и винта. В свою очередь винт, определяемый скользящим вектором $\boldsymbol{r}$ и свободным вектором $\boldsymbol{r}'$, есть комплексный вектор $\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}'$. В случае пространства постоянной ненулевой кривизны систему приложенных сил можно заменить двумя скользящими векторами, направленными по двум взаимно полярным прямым. Такой винт получил название мóтора [1]). Только что указанные связи между бикватернионами, общими комплексными числами, винтами и векторами имеют место и для мóторов. Заметим еще, что вторая единица общего комплексного числа ω является оператором некоторого преобразования вектора, на который умножается ω. Двукратное применение этой операции в евклидовом пространстве дает нуль-вектор, так что $\omega^2 = 0$; вообще же $\omega^2 = k^2$.

Магистерская диссертация А. П. Котельникова, предметом которой служили векторы, винты и их приложения для случая пространства Евклида, явилась как бы вступлением к докторской. В «Проективной теории векторов» дана общая теория векторов пространств постоянной кривизны, трактуемых как метрические проективные пространства. Метризация, т. е. измерение длин и углов, достигается тем, что в рассматриваемом проективном пространстве фиксируется так называемый абсолют — действительная или мнимая поверхность второго порядка, которая переходит сама в себя при проективном преобразовании, переводящем точки, лежащие на одной прямой, в точки, расположенные опять-таки на прямой. Для пространства Евклида абсолют есть бесконечно удаленная плоскость вместе с принадлежащей ей мнимой линией пересечения всех сфер, для пространства Римана — некоторая мнимая поверхность и для пространства Лобачевского — поверхность замкнутая.

---

[1]) Дело в том, что мóтор характеризует произвольное движение (лат. motio) в рассматриваемом пространстве. Напомним, что вектор характеризует перемещение (лат. vectio) вдоль прямой.

В докторской диссертации подробно изложены арифметика общих комплексных чисел, учение об их элементарных функциях и геометрические интерпретации на плоскости и поверхностях второго порядка. Далее последовательно разрабатывается теория векторов и операций над ними. Сложение производится по правилу четырехугольника: на рис. 50 сумма векторов $\overline{ox}$ и $\overline{oy}$ определяется как диагональ $\overline{oz}$; следует иметь в виду, что точки a и b находятся в пересечении прямых, несущих $\overline{ox}$ и $\overline{oy}$ с плоскостью O, полярной с точкой o относительно абсолюта. В пространстве Евклида плоскость O бесконечно удаленная и четырехугольник переходит в параллелограмм.

Для векторов, мóторов и еще третьего вида основных объектов, роторов, которые вводятся как пары плоскостей, пересечение которых называется осью ротора [1]), определяются различные характеризующие их величины, которые, так же как и операции над ними, во многом сходны со свойствами обыкновенных векторов и служат их обобщениями. Все это осуществляется с помощью исчисления бикватернионов, которые Котельников предпочитает рассматривать не в форме $q_1 + \omega q_2$, а в форме $q = \omega + ix + jy + kz$, где ω, x, y, z суть общие комплексные числа $a + b\omega$. Это позволяет весьма просто переводить формулы теории кватернионов в формулы теории бикватернионов и, на основе сходства обеих теорий, установить параллелизм геометрических систем, которые служат их геометрической интерпретацией, т. е. теории векторов и теории мóторов. В более поздней работе, опубликованной уже посмертно, А. П. Котельников писал:

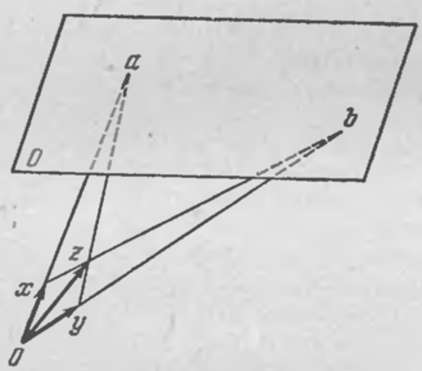

Рис. 50. Сложение векторов в теории А. П. Котельникова.

«Мы приходим, таким образом, к мысли перенести из теории векторов такие элементарные понятия, как длина вектора, проекция вектора, координаты вектора, угол между двумя векторами и т. д. в теорию мóторов и внести в эту последнюю соответствующие понятия: тензор мóтора, проекции мóтора, комплексные координаты мóтора, комплексный угол между прямыми и т. д. [2]). Вместе с тем получается возможность каждому построению и теореме теории связки векторов сопоставить построение и теорему теории мóторов и, пользуясь первыми, находить новые, еще не известные теоремы теории мóторов. Таким образом, мы приходим к принципу перенесения» [3]).

---

[1]) Ротор характеризует вращение (лат. rotatio) тела около оси. Заметим, что мóтор можно вводить и как пару, составленную из вектора и ротора с осью, проходящей через начало вектора. Всякое движение в рассматриваемых пространствах можно в любой момент рассматривать как перемещение вдоль прямой вместе с вращением вокруг нее.

[2]) Тензор мóтора, определяемого парой скользящих векторов с углом φ между ними и кратчайшим расстоянием d, есть комплексное число $\operatorname{tg}\varphi + \frac{\omega}{k}\operatorname{tg}(kd)$; комплексным углом между двумя прямыми называется число $\varphi + \omega d$; проекция мóтора на ось равна произведению его тензора на косинус комплексного угла между осью мóтора и осью проекции.

[3]) А. П. Котельников. Теория векторов и комплексные числа. В кн.: А. П. Котельников, В. А. Фок, Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, М.—Л., 1950, стр. 42.

Принцип перенесения имеет большое значение в исследовании Котельникова, устанавливая соответствие между простыми геометрическими фигурами и более сложными. Если взять комплексную сферу единичного радиуса в евклидовом пространстве, координаты которого суть общие комплексные числа $a + b\omega$, то один из основных результатов А. П. Котельникова можно высказать следующим образом: множество лучей неевклидова пространства взаимно однозначно изображается комплексной сферой, причем комплексный угол между прямыми равен сферическому расстоянию соответственных точек сферы, а щетки прямых (множества перпендикуляров к одной прямой) изображаются большими кругами сферы. Вместе с тем, движения неевклидова пространства изображаются вращениями комплексной сферы, и обратно.

Исследования Котельникова развивались одновременно с аналогичными изысканиями немецкого математика Э. Штуди, начатыми в 1891 г. и завершенными в наиболее важных частях в 1899—1901 гг. [1]).

Так в той же Казани, где Лобачевский положил начало неевклидовой геометрии, в широком плане была разработана теория векторов и механика трехмерных пространств постоянной кривизны. Неевклидова механика привлекала внимание и других русских ученых, помимо названных. Укажем для примера статью Н. Е. Жуковского «О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы» (1902) [2]).

[1]) Б. А. Розенфельд, Александр Петрович Котельников.— Ист.-матем. исслед., вып. IX, 1956.

[2]) Н. Е. Жуковский, Собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1948.